Développement : Théorème des lacunes d'Hadamard.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agreg

Énoncé :

Théorème 1 : Soit $S = \sum a_n z^{p_n}$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 telle que (p_n) soit une suite lacunaire et strictement croissant d'entiers. Alors tous les points du cercle S^1 sont singuliers.

On rappelle avant quelques notions :

Définition 2 : On définit le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ comme étant

$$R = \sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge}\}$$

Définition 3 : On dit qu'une suite réelle $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est lacunaire s'il existe $c > 1$ tel que pour tout $n \geq 0, p_{n+1} \geq cp_n$.

Définition 4 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a un point de U. On dit qu'une suite de fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est développable en série entière en a s'il existe une suite de nombre complexes (a_n) telle que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ soit strictement positif et telle que pour tout $z \in D(a, R)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - a)^n.$$

On dit que f est analytique sur U si elle est développable en série entière en tout point de U.

Définition 5 (points réguliers et singuliers) 5 : Soient S une série entière de rayon de convergence R dont on note f la somme dans le disque $D(0, R)$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$. On dit que z est un point régulier de S s'il existe un ouvert Ω contenant $D(0, R) \cup \{z\}$ et une fonction F analytique sur Ω telle que $F = f$ sur $D(0, R)$. Dans ce cas, on dit que f admet un prolongement analytique au voisinage de z. Si z n'est pas régulier alors on dit que z est singulier.

Théorème 6 : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Alors f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U.

Théorème (prolongement analytique) 7 : Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant un point a et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
• f est identiquement nulle sur U; • f est identiquement nulle sur un voisinage de a.

Résolution :

Lemme 8 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $D(0,1) \cup \{1\}$. On définit le polynôme

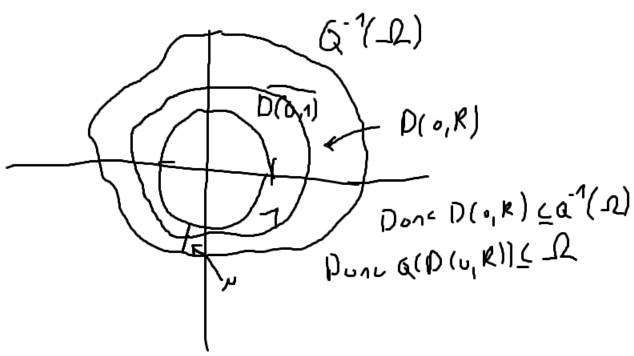
$$Q(X) = \frac{X^M + X^{M+1}}{2}.$$

Alors il existe $R > 1$ tel que $Q(D(0,R)) \subseteq \Omega$.

Démonstration Commençons par montrer que $Q(\overline{D(0,1)}) \subseteq \Omega$. Soit $z \in \overline{D(0,1)}$. Si $|z| < 1$, alors $|Q(z)| = |z|^M \frac{|z+1|}{2} \leq |z|^M < 1$ et donc $Q(z) \in \Omega$ (car $Q(z) \in D(0,1)$ et $D(0,1) \subset \Omega$). Si $z = 1$, alors $Q(z) = 1$ et donc $Q(z) \in \Omega$(car $\{1\} \subset \Omega$). Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors par inégalité triangulaire $|Q(z)| = \frac{|1+z|}{2} \leq 1$. Dans ce cas, si on a $|Q(z)| = 1$, c'est que l'on est dans le cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire, donc que 1 et z sont colinéaires, il existe $\lambda > 0$ tel que $z = \lambda$ et comme $|z| = 1$, on a $\lambda = 1$ et donc $z = 1$, ce qui est exclut. Ainsi si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, on a $|Q(z)| < 1$ et $Q(z) \in \Omega$. On en déduit que $Q(\overline{D(0,1)}) \subseteq \Omega$.
Or $Q^{-1}(\Omega)^c$ est un fermé de $\mathbb{C}$ et $\overline{D(0,1)}$ est un compact. Ainsi la distance entre $Q^{-1}(\Omega)^c$ et $\overline{D(0,1)}$ est atteinte mais ne peut être nulle.

> En effet, on sait que la distance entre un compact et un fermé disjoint existe et est même non nulle. Ici, comme on a que $Q(\overline{D(0,1)}) \subseteq \Omega$, cela signifie que $\overline{D(0,1)} \subseteq Q^{-1}(\Omega)$ et donc on a bien que $\overline{D(0,1)}$ et $Q^{-1}(\Omega)^c$ sont disjoint. donc on a bien notre distance.

On définit alors $\mu = d(Q^{-1}(\Omega)^c, \overline{D(0,1)}) > 0$ et $R = 1 + \frac{\mu}{2}$. Donc $D(0,R)$ est dans $Q^{-1}(\Omega)$ et donc $Q(D(0,R)) \subseteq \Omega$. □



Lemme 9 : Soient $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite lacunaire strictement croissante d'entiers et $\sum a_n z^{p_n}$ une série entière de rayon de convergence 1. Alors 1 est un point singulier.

Démonstration : On note f la somme de la série $\sum a_n z^{p_n}$ dans $D(0,1)$. Supposons que 1 est un point régulier de la série précédente. Ainsi il existe Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $D(0,1) \cup \{1\}$ et une fonction analytique $g : \Omega \to \mathbb{C}$ qui prolonge f sur Ω.
Comme la suite (p_n) est lacunaire, il existe $c > 1$ tel que $\forall n \geq 0, p_{n+1}/p_n \geq c$. Or $\lim_{M\to+\infty} \frac{M+1}{M} = 1$, donc on peut trouver un entier $M \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tels que pour tout $n \geq 0, p_{n+1}/p_n \geq c > (M+1)/M$ et donc $Mp_{n+1} \geq (M+1)p_n$.
D'après le Lemme précédent, il existe $R \geq 0$ tel que $Q(D(0,R)) \subseteq \Omega$. On peut alors définir la fonction (car $Q(z) \in \Omega$)

$$\begin{array}{rccc} F: & D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & g(Q(z)) \end{array}$$

Alors F est holomorphe comme composée de deux fonctions holomorphes (Q est un polynôme donc holomorphe et g est analytique donc holomorphe). La fonction F est donc développable en série entière en 0 : il existe (b_m) une suite de nombre complexes telle que $F(z) = \sum_{m\geq 0} b_m z^m$ de rayon de convergence supérieur ou égale à R.

> En effet, comme F est holomorphe sur le disque $D(0,R)$, la série entière centrée en 0 est définie sur tout le disque $D(0,R)$ et donc a bien un rayon de convergence au moins R.

On en déduit que pour tout $z \in D(0,1)$, comme $Q(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$

$$\begin{aligned}
\sum_{m\geq 0} b_m z^m &= \sum_{n\geq 0} a_n Q(z)^{p_n} \text{ car } g \text{ coincide avec } f = \sum a_n z^{p_n} \text{ sur } D(0,1) \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{2^{p_n}} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} z^{M(p_n-k)+(M+1)k} \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{2^{p_n}} \left(\sum_{k=0}^{p_n} \binom{p_n}{k} z^{Mp_n+k} \right)
\end{aligned}$$

Comme $Mp_{n+1} > (M+1)p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc pour $k \in [\![0\,;p_n]\!]$ que $Mp_n + k \leq Mp_n + p_n = (M+1)p_n < Mp_{n+1} \leq Mp_{n+1} + k'$ où $k' \in [\![0\,;p_{n+1}]\!]$. Donc toutes les puissances sont "distincts" dans le membre de droite (les supports des polynômes $a_n Q(X)^{p_n}$ sont deux à deux disjoints). Par unicité du développement en série entière, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0,1)$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n Q(z)^{p_n} = \sum_{n=0}^{(M+1)p_N} b_n z^n$$

D'après le théorème du prolongement analytique, les deux fonctions précédentes sont des polynômes donc des fonctions analytiques, et elles coïncident sur $D(0,1)$, un ouvert de $\mathbb{C}$. On a donc l'égalité précédente pour tout z de $\mathbb{C}$.
Soit $N \geq 0$ et $x \in]1, R[$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{(M+1)p_N} b_n x^n = \sum_{k=0}^{N} a_n Q(x)^{p_n}$$

Or la somme partielle à gauche tends vers $F(x)$ quand N tends vers $+\infty$ car le rayon de convergence de F est plus grand que R. Donc la série $\sum a_n Q(x)^{p_n}$ converge. Donc le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^{p_n}$ est supérieur ou égale à $Q(x)$. Or comme $|x| > 1$

$$|Q(x)| = \frac{|x|^M}{2} + \frac{|x|^{M+1}}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Cela contredit l'hypothèse de départ que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{p_n}$ est 1.
On en déduit que 1 est un point singulier. □

Démonstration (Théorème) Soit $e^{i\theta}$ un point du cercle S^1. On définit la série entière

$$G = \sum a_n e^{ip_n\theta} z^{p_n} = \sum a_n (e^{i\theta} z)^{p_n}$$

Donc G est de rayon de convergence 1 et avec $a'_n = a_n e^{ip_n\theta}$, G vérifie le lemme précédent et 1 est un point singulier de G. Donc $e^{i\theta}$ est un point singulier pour S. □